学术论文

模糊推理的模糊熵反向 α-三 I 约束算法*

彭家寅

内江师范学院数学系，内江 641112

摘要 讨论了 FMP，FMT 问题的模糊熵反向 α-三 I 约束解的存在条件，研究了反向 α-三 I 约束解与模糊熵反向 α-三 I 约束解的关系，分别给出了几个常见蕴涵算子的 FMP 问题与 FMT 问题的模糊熵反向 α-三 I 约束解的计算公式.

关键词 模糊推理 蕴涵算子 极大模糊熵原理 模糊熵反向 α-三 I 约束算法

美国控制论专家及模糊集理论创始人 Zadeh 于 1973 年提出了模糊推理中著名的求解 FMP 和 FMT 问题的 CRI 算法[1]. 由于模糊推理适用于含有模糊性的不确定性推理并且贴近人类的思维模式，所以模糊推理一经提出，就受到了广泛的关注，很快就涌现出一大批理论性的与应用性的研究成果，特别是以模糊控制为核心的模糊技术已经被广泛地应用于许多工业和科研领域，取得了显著的经济效益. 然而，模糊推理远较经典逻辑学中的二值推理复杂. 从应用的角度看，似乎很难找到一种普遍适用于各种不同领域的模糊推理方法. 而且基于 CRI 方法的模糊系统本质上是一种插值器[2]，应用此系统在研究模糊系统的函数逼近问题时，不可避免地出现“规则爆炸”的现象. 从理论角度看，Zadeh 的 CRI 算法及其演变[3]的推理机制也似乎有若干值得推敲之处. 因此，近年来模糊推理基础和推理方法的问题受到极大的关注. 我国学者王国俊于 1999 年提出了模糊推理全蕴涵三 I 算法[4,5]，有效地改进了经典的 CRI 算法，并将之纳入到模糊逻辑的框架之中.

宋士吉等于 2002 年从如何设计模糊系统，使得在给定的精度下模糊规则库中的元素个数最小的角度出发，提出了反向三 I 支持算法[6]，并沿着这个思路在同年提出了模糊推理的 α-反向三 I 约束算法[7]，其基本思想如下：

反向 α-三 I 约束算法 已知 $A\in F(X)$ 和 $B\in F(Y)$，并且 $A^*\in F(X)$（或 $B^*\in F(Y)$），对于给定的 $\alpha\in(0,1]$，寻求最小的 $B^*\in F(Y)$（或最大的 $A^*\in F(X)$），使得

$$(A^*(x)\to B^*(y))\to(A(x)\to B(y))\leqslant\alpha \tag{1}$$

对一切 $x\in X$ 与 $y\in Y$ 成立.

我们把(1)式的 FMP 问题（FMT 问题）关于蕴涵算子 $R=\to$ 的解称为 FMP 问题（FMT 问题）的 R-型反向 α-三 I 约束解.

事实上，满足使得(1)式成立的模糊集组成一个集合. 为什么要在这个集合中取最小或最大的模糊集作为推理结果呢？文献[7]没有给出进一步的解释. Jaynes 于 1975 年提出了极大熵原理，用于处理不确定信息的问题，其中心思想是“在用不完全的信息进行推理的过程中，我们必须使用在已知条件的约束下，熵最大的分布，这是我们能做的惟一

2006-07-06 收稿，2006-09-04 收修改稿

* 四川省科学技术厅重点科技项目（批准号：2006J13-035）

E-mail：pengjiayin@njtc.edu.cn

的无偏的分派，而用任何其他的分派都等同于任意的假设我们未知的信息."[8]从极大熵原理的角度看，文献[7]中取最小或最大模糊集虽然优于某些模糊集，但它们毕竟是对未知结果的一种假设. 为此，文献[8]针对FMP问题的全蕴涵三I方法，提出了模糊推理的极大模糊熵原理.

极大模糊熵原理 在运用模糊概念来进行推理的过程中，应该用使得在已知条件的约束下，未知模糊集的熵最大的那个模糊集作为推理结果，并称这种用模糊熵来度量三I模糊推理结果的方法为模糊熵三I算法. 用模糊熵来度量反向三I约束算法之模糊推理结果正是本文将要讨论的问题.

为了讨论方便，我们将1972年Deluca和Termini提出的模糊熵的概念引出如下：

设论域为X，$A\in F(X)$，模糊熵$H(A)$是具有如下性质的映射H：$F(X)\to[0,1]$，其中$H(A)$叫做A的熵[9].

(p1) $\forall x\in X$，$A(x)=0$或$A(x)=1$时，$H(A)$取得最小值；

(p2) $\forall x\in X$，$A(x)=1/2$时，$H(A)$取得最大值；

(p3) $\forall x\in X$，$1/2\geqslant A(x)\geqslant B(x)$或$B(x)\geqslant A(x)\geqslant 1/2$时，$H(A)\geqslant H(B)$；

(p4) $H(A)=H(A')$，其中A'为A的余集.

我们把在极大模糊熵原理下，(1)式的FMP问题(或FMT问题)关于蕴涵算子$R=\to$的解称为FMP问题(或FMT问题)的R-型模糊熵反向α-三I约束解.

1 基于某些常见蕴涵算子的模糊熵反向α-三I约束算法

模糊熵反向α-三I约束原则 设X，Y为两个非空集合，已知$A\in F(X)$和$B\in F(Y)$，并且$A^*\in F(X)$(或$B^*\in F(Y)$)，对于给定的$\alpha\in(0,1]$，寻求模糊熵最大的$B^*\in F(Y)$(或$A^*\in F(X)$)，使得$(A^*(x)\to B^*(y))\to(A(x)\to B(y))\leqslant\alpha$对一切$x\in X$与$y\in Y$都成立.

本文考虑模糊系统中使用较多的如下5个蕴涵算子：Kleene-Dienes蕴涵算子：$R_{KD}(a,b)=a'\vee b$；Reichenbach蕴涵算子：$R_R(a,b)=a'+ab$；Lukasiewicz蕴涵算子：$R_{Lu}(a,b)=1\wedge(a'+b)$；Goguen蕴涵算子：$R_G(a,b)=\frac{b}{a}\wedge 1$，其中约定$\frac{b}{0}=1$；Yager蕴涵算子：$R_Y(a,b)=b^a$，其中约定$0^0=1$.

1.1 FMP问题的模糊熵反向α-三I约束算法

定理1 若$R=\to$：$[0,1]^2\to[0,1]$关于第一变量不增，且关于第二变量不减，则(1)式左端的最小值为$M(x,y)=(A^*(x)\to 1)\to(A(x)\to B(y))$.

证 因R关于第二变量不减，则$\forall B^*\in F(Y)$，$(A^*(x)\to 1)\geqslant(A^*(x)\to B^*(y))$. 又$R$关于第一变量不增，我们有

$$(A^*(x)\to 1)\to(A(x)\to B(y))\leqslant$$
$$(A^*(x)\to B^*(y))\to(A(x)\to B(y)),$$

即结论成立.

由定理1知(1)式左端的最小值为$M(x,y)=R(R(A^*(x),1),R(A(x),B(y)))$，因此对于(1)式的FMP的问题的$\alpha$应满足

$$R(R(A^*(x),1),R(A(x),B(y)))\leqslant\alpha\leqslant 1.$$

对于给定的$\alpha\in(0,1]$，当$\alpha\in(0,R(R(A^*(x),1),R(A(x),B(y))))$时，FMP问题的模糊熵反向$\alpha$-三I约束算法无解；当$\alpha=1$时，FMP问题的模糊熵反向$\alpha$-三I约束的解$B^*(y)=1/2$.

值得注意的是：对于给定的$A\in F(X)$，$B\in F(Y)$和$A^*\in F(X)$，可能存在某$(x_0,y_0)\in X\times Y$使得$R(R(A^*(x_0),1),R(A(x_0),B(y_0)))=1$，此时，(1)式仅当$\alpha=1$时有解且解为$B^*(y)=1/2$.

本节以下部分就如下条件(以下称之为条件(2))

$$\forall(x,y)\in X\times Y,$$
$$R(R(A^*(x),1),R(A(x),B(y)))<1$$

且

$$\alpha\in[R(R(A^*(x),1),R(A(x),B(y))),1]\quad(2)$$

进行讨论. 关于FMP问题的模糊熵反向α-三I约束解的存在性有如下结论：

定理2 若$R=\to$：$[0,1]^2\to[0,1]$关于第一变量不增，关于第二变量不减，并且关于第一和第二变量都是右连续的，则在条件(2)下，FMP问题

的 R-型模糊熵反向 α-三约束解是存在的.

证 记 $\Omega=\{B^*\in F(Y)\mid(A^*(x)\to B^*(y))\to(A(x)\to B(y))\leqslant\alpha,\ x\in X,\ y\in Y\}$，则由 $1\in\Omega$ 知 Ω 非空. 令 $\overline{B}=\wedge\{B\mid B\in\Omega\}$，则 $\overline{B}\in F(Y)$. 现在证明对一切 $x\in X$ 和 $y\in Y$ 都有

$$(A^*(x)\to\overline{B}(y))\to(A(x)\to B(y))\leqslant\alpha \quad (3)$$

反设(3)式不成立，则有 $x_0\in X$ 和 $y_0\in Y$ 使得

$$(A^*(x_0)\to\overline{B}(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))>\alpha \quad (4)$$

因 $R(s,t)$关于 s 和 t 都右连续，则

$$\lim_{s\to s_0+}R(s,t_0)=R(s_0,t_0)=\lim_{t\to t_0+}R(s_0,t). \quad (5)$$

设 $R(A(x_0),B(y_0))=c$，$R(A^*(x_0),\overline{B}(y_0))=d$，则(4)式左边等于 $R(d,c)$. 由 $\overline{B}=\bigwedge_{B\in\Omega}B$ 知 Ω 中有 $B_1,B_2,B_3,\cdots$，使得 $\lim_{n\to\infty}B_n(y_0)=\overline{B}(y_0)$. 注意到 $B_n(y_0)\geqslant\overline{B}(y_0)$，则由(5)式得 $\lim_{n\to\infty}R(A^*(x_0),B_n(y_0))=R(A^*(x_0),\overline{B}(y_0))=d$. 又 $R(s,t)$关于 t 为增函数，故 $d\leqslant R(A^*(x_0),B_n(y_0))$恒成立，所以再次使用(5)式得

$$\lim_{n\to\infty}R(R(A^*(x_0),B_n(y_0)),c)=R(d,c).$$

从而由(4)式知有 n 使 $R(R(A^*(x_0),B_n(y_0)),c)>\alpha$，即

$$(A^*(x_0)\to B_n(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))>\alpha,$$

这与 $B_n\in\Omega$ 相矛盾. 取 $B^*=\overline{B}\vee\frac{1}{2}$，由 R 关于第二变量不减知，$A^*(x)\to B^*(y)\geqslant A^*(x)\to\overline{B}(y)$，再因为 R 关于第一变量不增可知，$(A^*(x)\to B^*(y))\to(A(x)\to(B(y))\leqslant(A^*(x)\to\overline{B}(y))\to(A(x)\to(B(y))=M(x,y)$，故 $B^*\in\Omega$. 现证 B^* 是 Ω 中模糊熵最大者. 事实上，$\forall B\in\Omega$，$\forall y\in Y$ 有 $B(y)\geqslant\overline{B}(y)$. 若 $\overline{B}(y)\geqslant\frac{1}{2}$，则 $\frac{1}{2}\leqslant B^*(y)=\overline{B}(y)\leqslant B(y)$；若 $\overline{B}(y)<\frac{1}{2}\leqslant B(y)$，则 $\frac{1}{2}=B^*(y)\leqslant B(y)$；若 $\overline{B}(y)\leqslant B(y)<\frac{1}{2}$，则 $B(y)<B^*(y)=\frac{1}{2}$. 由此可知，$H(B^*)\geqslant H(B)$.

由定理2的证明过程可得

定理3 对于任何关于第一变量不增，关于第二变量不减的蕴涵算子 R，若 FMP 问题 R-型反向 α-三Ⅰ约束解为 $\overline{B}$，则 $B^*=\overline{B}\vee\frac{1}{2}$为 FMP 问题 R-型模糊熵反向 α-三Ⅰ约束解.

定理4 若 $R=\to$是 Kleene-Dienes 蕴涵，则在条件(2)下，FMP 问题的 R-型模糊熵反向 α-三Ⅰ约束解 B^* 为

$$B^*(y)=\begin{cases}(1-\alpha)\vee\frac{1}{2}, & y\in E\\ \frac{1}{2}, & y\in Y\backslash E\end{cases}$$

其中 $E=\{y\in Y\mid\sup_{x\in X}A^*(x)>\alpha\}$.

证 令 $\overline{B}(y)=\begin{cases}1-\alpha, & y\in E\\ 0, & y\in Y\setminus E\end{cases}$，对任意的 $y\in Y$ 与满足 $C(y)\geqslant\overline{B}(y)$的 $C(y)\in F(Y)$，$C(y)$必使得(1)式成立. 事实上，根据 Kleene-Dienes 蕴涵关于第一变量不增，关于第二变量不减的性质知

$$\begin{aligned}&(A^*(x)\to C(y))\to(A(x)\to B(y))\leqslant\\&(A^*(x)\to\overline{B}(y))\to(A(x)\to B(y))=\\&[(A^*(x))'\vee\overline{B}(y)]'\vee R_{KD}(A(x),B(y))=\\&[A^*(x)\wedge(\overline{B}(y))']\vee R_{KD}(A(x),B(y)).\end{aligned}$$

对任意的 $x\in X$，由条件(2)知 $\alpha\geqslant R_{KD}(A(x),B(y))$，于是

$$[A^*(x)\wedge(\overline{B}(y))']\vee R_{KD}(A(x),B(y))\leqslant\alpha\vee\alpha=\alpha$$

无论对 E 是否为空集均成立，故 $C(y)$使得(1)式成立.

另一方面，若存在某一 $y_0\in Y$ 满足 $D(y_0)<\overline{B}(y_0)$，则 $D(y_0)$不会使得(1)式成立. 事实上，由此蕴涵算子的性质知

$$\begin{aligned}&(A^*(x)\to D(y_0))\to(A(x)\to B(y_0))=\\&[A^*(x)\wedge(D(y_0))']\vee R_{KD}(A(x),B(y_0)). \quad (6)\end{aligned}$$

现分情况讨论如下：

情形1：当 $y_0\in E$ 时，$\exists x_0\in X$ 使得 $\overline{B}(y_0)=1-\alpha$，$A^*(x_0)>\alpha$，从而 $(D(y_0))'>\alpha$. 这样，有 $(x_0, y_0)\in X\times Y$ 使(6)式的右端之值大于 α，即 $D(y_0)$ 不会使(1)式对 $\forall(x, y)\in X\times Y$ 成立.

情形2：当 $y_0\notin E$ 时，$\overline{B}(y_0)=0$，从而满足 $D(y_0)<\overline{B}(y_0)$ 的 $D\in F(Y)$ 不存在，因而其不会使(1)式成立.

综上所述，$\overline{B}(y)$ 是使(2)式成立的 $F(Y)$ 中的最小模糊集. 由定理3知，取 $B^*=\overline{B}\vee\frac{1}{2}$ 便得本定理的结论.

类似地可得到其余的四个蕴涵算子的FMP问题的模糊熵反向 α-三I约束算法公式：

定理5 若 $R=\rightarrow$ 是Reichenbach蕴涵，则在条件(2)下，FMP问题的 R-型模糊熵反向 α-三I约束解 B^* 由下式给出

$$B^*(y)=\left\{\bigvee_{x\in E_y}\left[1-\frac{\alpha-R_{\mathrm{R}}(A(x),B(y))}{A^*(x)R'_{\mathrm{R}}(A(x),B(y))}\wedge 1\right]\right\}\vee\frac{1}{2}, y\in Y,$$

这里 $E_y=\{x\in X\mid A^*(x)R'_{\mathrm{R}}(A(x), B(y))\neq 0\}$.

定理6 若 $R=\rightarrow$ 是Lukasiewicz蕴涵，则在条件(2)下，FMP问题的 R-型模糊熵反向 α-三I约束解 B^* 由下式给出

$$B^*(y)=\bigvee_{x\in E_y}\{A^*(x)+R_{\mathrm{Lu}}(A(x), B(y))-\alpha)\}\vee\frac{1}{2}, y\in Y,$$

其中 $E_y=\{x\in X\mid A^*(x)+R_{\mathrm{Lu}}(A(x), B(y))>\alpha\}$.

定理7 若 $R=\rightarrow$ 是Goguen蕴涵，则在条件(2)下，FMP问题的 R-型模糊熵反向 α-三I约束解 B^* 由下式给出

$$B^*(y)=\left\{\bigvee_{x\in E_y}\left[\frac{1}{\alpha}R_{\mathrm{G}}(A(x), B(y))A^*(x)\right]\right\}\vee\frac{1}{2}, y\in Y,$$

其中 $E_y=\{x\in X\mid R_{\mathrm{G}}(A(x), B(y))A^*(x)\neq 0\}$.

定理8 若 $R=\rightarrow$ 是Yager蕴涵，则在条件(2)下，FMP问题的 R-型模糊熵反向 α-三I约束解 B^* 由下式给出

$$B^*(y)=\left[\bigvee_{x\in E_y}\{(\log_{R_{\mathrm{Y}}(A(x),B(y))}\alpha)^{\frac{1}{A^*(x)}}\}\right]\vee\frac{1}{2}, y\in Y,$$

其中 $E_y=\{x\in X\mid 0<R(A(x), B(y)), A^*(x)>0\}$.

1.2 FMT问题的模糊熵反向 α-三I约束算法

定理9 若 $R=\rightarrow$：$[0, 1]^2\rightarrow[0, 1]$ 关于第一变量不增，则(1)式左端的最小值为 $N(x, y)=(0\rightarrow B^*(y))\rightarrow(A(x)\rightarrow B(y))$.

证：$\forall A^*\in F(X)$，有 $A^*(x)\geqslant 0$，因 R 关于第一变量不增，所以 $A^*(x)\rightarrow B^*(y)\leqslant 0\rightarrow B^*(y)$，从而

$$(A^*(x)\rightarrow B^*(y))\rightarrow(A(x)\rightarrow B(y))\geqslant (0\rightarrow B^*(y))\rightarrow(A(x)\rightarrow B(y)),$$

故结论成立.

由定理9知(1)式左端的最小值为 $N(x, y)=R(R(0,B^*(y)), R(A(x), B(y)))$，因此对于(1)式的FMT问题的 α 应满足

$$R(R(0,B^*(y)),R(A(x),B(y)))\leqslant\alpha\leqslant 1.$$

对于给定的 $\alpha\in(0, 1]$，当 $\alpha\in(0, R(R(0, B^*(y)), R(A(x), B(y))))$ 时，FMT问题的模糊熵反向 α-三I约束算法无解；当 $\alpha=1$ 时，FMT问题的模糊熵反向 α-三I约束的解 $A^*(x)=1/2$.

需要指出的是，对于给定的 $A\in F(X)$，$B\in F(Y)$ 和 $B^*\in F(Y)$，可能存在某 $(x_0, y_0)\in X\times Y$ 使得 $R(R(0, B^*(y_0)), R(A(x_0), B(y_0)))=1$，此时(1)式的FMT问题仅当 $\alpha=1$ 时有解，且解为 $A^*(x)=1/2$.

本节以下部分就如下条件(以下称为条件(7))：

$$\forall(x,y)\in X\times Y, R(R(0,B^*(y)), R(A(x),B(y)))<1$$

且

$$\alpha\in[R(R(0,B^*(y)),R(A(x),B(y))),1], \quad (7)$$

进行讨论. 关于FMT问题的模糊熵反向 α-三I约束

解的存在性有如下结论：

定理 10 若 $R=\rightarrow$：$[0,1]^2\rightarrow[0,1]$关于第一变量不增且连续，则在条件(7)下，FMT 问题的 R-型模糊熵反向 α-三 I 约束解是存在的.

证 记 $\Lambda=\{A^*\in F(X)\mid(A^*(x)\rightarrow B^*(y))\rightarrow(A(x)\rightarrow B(y))\leqslant\alpha,\ x\in X,\ y\in Y\}$，则由 $0\in\Lambda$ 知 Λ 非空. 令 $\overline{A}=\vee\{A\mid A\in\Lambda\}$，则 $\overline{A}\in F(X)$. 现在我们证明对一切 $x\in X$ 和 $y\in Y$ 都有

$$(\overline{A}(x)\rightarrow B^*(y))\rightarrow(A(x)\rightarrow B(y))\leqslant\alpha\quad(8)$$

成立. 反设(8)式不成立，则存在 $x_0\in X$ 和 $y_0\in Y$ 满足

$$(\overline{A}(x_0)\rightarrow B^*(y_0))\rightarrow(A(x_0)\rightarrow B(y_0))>\alpha\,.$$

由 $\overline{A}=\vee\{A\mid A\in\Lambda\}$知，在 Λ 中存在序列$\{A_n\}$使得 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n(x_0)=\overline{A}(x_0)$且 $A_n(x_0)<\overline{A}(x_0)$，$\forall n\in N$. 由 $R(s,t)$关于 s 连续知

$$\lim_{n\to\infty}R(R(A_n(x_0),B^*(y_0)),R(A(x_0),B(y_0)))=$$
$$R(\lim_{n\to\infty}R(A_n(x_0),B(y_0)),R(A(x_0),B(y_0)))=$$
$$R(R(\lim_{n\to\infty}A_n(x_0),B^*(y_0)),R(A(x_0),B(y_0)))=$$
$$R(R(\overline{A}(x_0),B(y_0)),R(A(x_0),B(y_0)))>\alpha.$$

于是存在 A_n 使得 $R(R(A_n(x_0),B^*(y_0)),R(A(x_0),B(y_0)))>\alpha$，这与 $A_n\in\Lambda$ 矛盾. 取 $A^*=\overline{A}\wedge\frac{1}{2}$，则 $A^*(x)\leqslant\overline{A}(x)$，$\forall x\in X$. 因 R 关于第一变量不增，故$(A^*(x)\rightarrow B^*(y))\rightarrow(A(x)\rightarrow B(y))\leqslant(A^*(x)\rightarrow\overline{B}(y))\rightarrow(A(x)\rightarrow B(y))=N(x,y)$，于是 $A^*\in\Lambda$. 现证明 A^* 是 Λ 中模糊熵最大者. 事实上，$\forall A\in\Lambda$，$\forall x\in X$ 有，$\overline{A}(x)\geqslant A(x)$. 若 $\overline{A}(x)\geqslant A(x)\geqslant\frac{1}{2}$，则$\frac{1}{2}=A^*(x)\leqslant A(x)$；若 $\overline{A}(x)\geqslant\frac{1}{2}>A(x)$，则$\frac{1}{2}=A^*(x)>A(x)$；若$\frac{1}{2}>\overline{A}(x)\geqslant A(x)$，则$\frac{1}{2}>A^*(x)=\overline{A}(x)\geqslant A(x)$. 由此可知，$H(A^*)\geqslant H(A)$.

从定理 10 的证明过程可得：

定理 11 对任何关于第一变量不增的蕴涵算子 R，若 FMT 问题的 R-型反向 α-三 I 约束解为 $\overline{A}$，则 $A^*=\overline{A}\wedge\frac{1}{2}$为 FMT 问题的 R-型模糊熵反向 α-三 I 约束解.

对于 Kleene-Dienes 蕴涵算子 R 有：$\forall a,b\in[0,1]$，$R(a,b)=R(b',a')$. 因此由定理 4 可得如下结论：

定理 12 若 $R=\rightarrow$是 Kleene-Dienes 蕴涵，则在条件(7)下，FMT 问题的 R-型模糊熵反向 α-三 I 约束解 A^* 由下式给出

$$A^*(x)=\begin{cases}\alpha\wedge\dfrac{1}{2},x\in E\\[2mm]\dfrac{1}{2},x\in X\backslash E\end{cases},$$

这里 $E=\{x\in X\mid\sup\limits_{y\in Y}\{(B^*(y))'\}>\alpha\}$.

定理 13 若 $R=\rightarrow$是 Reichenbach 蕴涵，则在条件(7)下，FMT 问题的 R-型模糊熵反向 α-三 I 约束解 A^* 由下式给出

$$A^*(x)=\left[\bigwedge_{y\in E_x}\left\{\frac{\alpha-R_R(A(x),B(y))}{R'_R(A(x),B(y))(B^*(y))'}\wedge1\right\}\right]\wedge\frac{1}{2},\quad x\in X,$$

其中 $E_x=\{y\in Y\mid(B^*(y))'\neq0\}$.

证 由于 Reichenbach 蕴涵算子满足定理 10 的条件，故其解是存在的. 首先考虑 FMT 问题的 R-型反向 α-三 I 约束解 $\overline{A}$，依 R_R 定义知，

$$(\widetilde{A}(x)\rightarrow B^*(y))\rightarrow(A(x)\rightarrow B(y))=$$
$$1-(1-\widetilde{A}(x)(B^*(y))')R'_R(A(x),B(y))=$$
$$R_R(A(x),B(y))+R'_R(A(x),B(y))(B^*(y))'\widetilde{A}(x),\quad(9)$$

这里 x，A，B 及 B^* 都已固定且由条件(7)知，$1>\alpha>R_R(A(x),B(y))$. 若 $y\in Y$ 使得$(B^*(y))'=0$，即 $B^*(y)=1$，则由(9)式知(1)式成立且与 $\widetilde{A}(x)$的值无关. 若 $B^*(y)<1$，则由(9)式和(1)式知，$\widetilde{A}(x)\leqslant\frac{\alpha-R_R(A(x),B(y))}{R'_R(A(x),B(y))(B^*(y))'}\wedge1$.

注意到 $\overline{A}$ 是对一切 $x\in X$ 与 $y\in Y$ 都使(1)式成立的 $F(X)$中的最大模糊集，故

$$\overline{A}(x)=\bigwedge_{y\in E_x}\left\{\frac{\alpha-R_{\mathrm{R}}(A(x),B(y))}{R'_{\mathrm{R}}(A(x),B(y))(B^*(y))'}\wedge 1\right\}.$$

由定理11便得本结论成立.

对于其余三个蕴涵算子，我们可仿照定理13的讨论得到有关结论如下：

定理14 若$R=\rightarrow$是Lukasiewicz蕴涵，则在条件(7)下，FMT问题的R-型模糊熵反向α-三I约束解A^*由下式给出

$$A^*(x)=\left[\bigwedge_{y\in Y}\{(\alpha+B^*(y)-R_{\mathrm{Lu}}(A(x),B(y)))\wedge 1\}\right]\wedge\frac{1}{2},x\in X.$$

定理15 若$R=\rightarrow$是Goguen蕴涵，则在条件(7)下，FMP问题的R-型模糊熵反向α-三I约束解A^*由下式给出

$$A^*(x)=\begin{cases}0, & x\in F\\ \left\{\bigwedge_{y\in E_x}\left[\frac{\alpha B^*(y)}{R_{\mathrm{G}}(A(x),B(y))}\wedge 1\right]\right\}\wedge\frac{1}{2}, & x\in X\backslash F\end{cases},$$

其中，$E_x=\{y\in Y\mid 0<R_{\mathrm{G}}(A(x),B(y)),0<B^*(x)<1\}$，$F=\{x\in X\mid \min_{y\in Y}B^*(y)=0\}$.

定理16 若$R=\rightarrow$是Yager蕴涵，则在条件(7)下，FMP问题的R-型模糊熵反向α-三I约束解A^*由下式给出

$$A^*(x)=\begin{cases}0, & x\in F\\ \{\bigwedge_{y\in E_x}[1\wedge\log_{B^*(y)}(\log_{R_Y(A(x),B(y))}\alpha)]\}\wedge\frac{1}{2}, & x\in X\backslash F\end{cases},$$

这里$E_x=\{y\in Y\mid 0<R_Y(A(x),B(y)),0<B^*(x)<1\}$，$F=\{x\in X\mid \min_{y\in Y}B^*(y)=0\}$.

2 结束语

模糊推理的理论与应用研究已成为当今模糊系统理论的热点之一. 在理论研究中，对于模糊推理中最基本的FMP与FMT问题，传统的CRI方法存在着若干缺陷与不足，全蕴涵三I方法有效地改进了CRI方法. 在实际应用中，基于CRI方法的模糊系统在研究函数泛逼近问题时，常出现“规则爆炸”的现象. 因而，如何设计模糊系统的推理规则及相应模糊系统，使在给定的精度下模糊规则库的元素最少是模糊控制研究的核心问题之一. 宋士吉等提出的反向三I支持算法为设计模糊推理规则提供了一个新思路，并沿着这一思路提出了反向三I约束算法. 然而宋士吉等仅针对R_0蕴涵算子进行全面的讨论，这对于实际模糊控制设计的选择是不够的. 对于一般模糊蕴涵算子的反向三I约束算法是否有解的讨论是一项有意义的工作. 本文提出了用模糊熵来度量α-反向三I约束算法的模糊推理结果的模糊程度，给出的模糊熵α-反向三I约束原则对宋士吉提出的模糊推理α-反向三I约束算法做了进一步的改进，讨论了FMP与FMT问题的模糊熵α-反向三I约束算法的解的存在条件，并给出了几个常见蕴涵算子相应的解的计算公式，进而可为实现新型模糊控制器的某些性能指标提供必要的理论依据. 然而，模糊熵三I算法，特别是模糊熵反向三I约束算法，在模糊控制系统的实践中，仍未见到相应的研究成果. 但我们相信，这是一项有非常重要意义的工作.

参 考 文 献

1 Zadeh LA. Outline of new approach to the analysis of complex systems and decision processes. IEEE Trans Sys Man Cybern, 1973, 3(1): 28—44

2 李洪兴. 模糊控制的插值机理. 中国科学，E辑，1998，28(3)：259—267

3 Dubois D, Prade H. Fuzzy sets in approximate reasoning, Part 1—2. Fuzzy Sets and Systems, 1991, 40(2): 143—244

4 王国俊. 模糊推理的全蕴涵三I算法. 中国科学，E辑，1999，29(1)：43—53

5 王国俊. 模糊推理的一个新方法. 模糊系统与数学，1999，13(3)：1—10

6 宋士吉，吴 澄. 模糊推理的反向三I支持算法. 中国科学，E辑，2002，32(2)：230—246

7 宋士吉，吴 澄. 模糊推理的反向三I约束算法. 自然科学进展，2002，12(1)：95—100

8 郭方芳，陈图云，夏尊铨. 基于极大模糊熵原理的模糊推理三I算法. 模糊系统与数学，2003，17(4)：55--59

9 Luca DA, Termini S. A definition of non-probabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory. Inform Control, 1972, 20: 301—312